Обобщение и систематизация знаний
по теме «Решение показательных уравнений и неравенств» в 11 профильном классе

Цели урока:

Обучающие:

- повторить свойства показательной функции, применение свойств при решении показательных уравнений и неравенств;
- решение комбинированных уравнений и неравенств, сводящихся к решению тригонометрических, дробно-рациональных уравнений и неравенств, неравенств с модулем;
- повторить возможные случаи потери корней при решении уравнений, а также случаи приобретения посторонних корней.

Развивающие:

- развивать навыки самостоятельного применения знаний в знакомой и измененной ситуации;
- учить анализировать, выделять главное, доказывать и опровергать логические выводы.

Воспитательные:

- формирование нравственных качеств, аккуратности, дисциплинированности, чувства собственного достоинства, ответственного отношения к достижению цели;
- формировать навыки коллективного труда.

Тип урока: урок обобщения и систематизации знаний.

План урока:

1. Организационный момент.
2. Повторение и актуализация опорных знаний.
3. Тест по проверке умения решать простейшие показательные уравнения и неравенства
4. Решение комбинированных уравнений и неравенств.
5. Подведение итогов. Задание на дом.

Ход урока:

1. Организационный момент.

2. Повторение и актуализация опорных знаний:

Проводится в форме фронтальной работы с классом.
Задания устного опроса можно разделить на две части: повторение теоретического материала и умения применять эти знания при выполнении различных заданий.

- Какую функцию называют монотонной?
- Какую функцию называют возрастающей? Какую функцию называют убывающей?
- Какая функция называется показательной? Каковы область определения и множество значений показательной функции?
- Какую показательную функцию называют возрастающей? (убывающей?)

- Важен ли характер монотонности показательной функции при решении уравнений?
- Как используется характер монотонности при решении показательных неравенств?

Устные упражнения:

1) **Какие из перечисленных показательных функций являются возрастающими, и какие убывающими**:

$y = \pi^x$; $\quad y = 49^{-\frac{x}{2}}$; $\quad y = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^x$;

2) **Сравните:**

$0{,}2^{-7{,}8}$ и $5^{6{,}4}$; $\quad 16\sqrt{2}$ и 4^2; $\quad 1{,}3^{-3}$ и $1{,}5^0$.

3) **Решите уравнения:**

а) $5^{2x-1} = \dfrac{1}{5}$ $\qquad$ б) $2^{x-2} = -2$ $\qquad$ в) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1$

4) **Решите неравенства:**

а) $2^{|x+2|} \le 1$ $\qquad$ б) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1-x^2} < \dfrac{27}{8}$ $\qquad$ в) $3^{\frac{1}{x}} > 0$

3. Тест по проверке умения решать простейшие показательные уравнения и неравенства

Учащиеся выполняют тест на подготовленных бланках, в таблице ответов ниже номера задания записывают цифру, которая соответствует правильному ответу.

Вариант 1

1) Решите уравнение: $\quad 9^{-1} \cdot 3^x = 81$

1) 6 $\qquad$ 2) 2 $\qquad$ 3) 5 $\qquad$ 4) 1

2) Решите неравенство: $\quad \left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x-7} > 0{,}04$

1) $(-\infty;3)$ $\qquad$ 2) $\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)$ $\qquad$ 3) $(3;+\infty)$ $\qquad$ 4) $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right)$

3) Решите уравнение: $\quad 2^{x+1} + 3\cdot 2^{x-3} = 76$

1) 4 $\qquad$ 2)5 $\qquad$ 3) 3 $\qquad$ 4) 6

4) Решите неравенство: $\quad 25^x < 6\cdot 5^x - 5$

1) (1;5) $\qquad$ 2) $(1;+\infty)$ $\qquad$ 3) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ $\qquad$ 4) (0;1)

Вариант 2

1) Решите уравнение: $4^{-1}\cdot 2^{x}=8$

1) 6 2) 2 3) 5 4) 1

2) Решите неравенство: $16\le 2^{x+3}$

1) -3 2) [7;+∞) 3) (-∞;-1] 4) [1;+∞)

3) Решите уравнение: $2\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7}-7\left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8}=49$

1) $\frac{5}{3}$ 2) -3 3) -$\frac{5}{3}$ 4) 3

4) Решите неравенство: $4^{x}+2>3\cdot 2^{x}$

1) (0;1) 2) (-∞;1)$\cup(2;+\infty)$ 3) $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ 4) (1;2)

Фронтальная проверка теста:

ученики по порядку называют задание и дают на него ответ с обоснованием. Во время проверки ученики корректируют свои знания по этой теме. По окончании проверки каждый выставляет себе оценку и сдает бланк учителю.

4. Решение комбинированных уравнений и неравенств

Каждое задание решает группа учащихся. Затем один из группы записывает решение на доске и поясняет его.

1). $0{,}3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots}<\sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}}$

Решение:
Преобразуем показатели степеней:

$(в_n):1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$ геометрическая прогрессия, $q=-\frac{1}{2}$, $S=\frac{b_1}{1-q}$,

$$S=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

Получим: $0{,}3^{\frac{2}{3}}<0{,}3^{(3x^2+5x)\cdot\frac{1}{3}}$

$$\frac{2}{3}>\frac{1}{3}\cdot(3x^2+5x),\quad 2>3x^2+5x,\quad 3x^2+5x-2<0$$

$$3(x+2)(x-\frac{1}{3})<0$$

$$x\in\left(-2;\frac{1}{3}\right)$$

Ответ: $\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

2). $\sqrt[x-4]{5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{\sqrt{x}+2}}}=125\cdot 0{,}04^{\frac{x-2}{x-4}}$

Решение:
Перейдем к одному основанию и воспользуемся свойствами степеней:

$$\left(5^{\frac{x}{\sqrt{x}+2}}\cdot 0{,}2^{\frac{-4}{\sqrt{x}+2}}\right)^{\frac{1}{x-4}}=5^3\cdot 5^{-2\cdot\frac{x-2}{x-4}}$$

$5^{\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{1}{x-4}}=5^{3-2\cdot\frac{x-2}{x-4}}$ Из монотонности показательной функции следует:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{3(x-4)-2(x-2)}{x-4}$$

$$\frac{\sqrt{x}-2-3x+12+2x-4}{x-4}=0$$

$$\frac{-x+\sqrt{x}+6}{x-4}=0$$

$\frac{-(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=0$, $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=3\\ \sqrt{x}=-2\end{array}\right.$ Решением системы является: x = 9

Ответ: 9

3). $\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|}$

Решение:

$$\frac{3^{2|x-1|}+3}{4}<3^{|x-1|} \quad \Big|\cdot 4,$$

Пусть $3^{|x-1|}=y$

Тогда $y^2+3-4y<0$

$(y-1)(y-3)<0$

$$\begin{cases} y<3 \\ y>1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3^{|x-1|}<3 \\ 3^{|x-1|}>1 \end{cases} \quad \begin{cases} |x-1|<1 \\ |x-1|>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1<1 \\ x-1>-1 \\ x\neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x<2 \\ x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$x\in(0;1)\cup(1;2)$

Ответ: $(0;1)\cup(1;2)$

4). $$1+2^{2ctgx}=5\cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\cdot\sin x}}$$

Решение:

Перейдем к одному основанию и воспользуемся формулами тригонометрии:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{2}\sin x}=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x}{\sqrt{2}\sin x}=\frac{1}{2}(ctgx-1)$$

$$1+2^{2ctgx}-5\cdot 2^{ctgx-1}=0$$

$$1+2^{2ctgx}-\frac{5}{2}\cdot 2^{ctgx}=0$$

Пусть $2^{ctgx}=y$, тогда уравнение примет вид $y^2-\frac{5}{2}y+1=0$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=2 \\ y_2=\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2^{ctgx}=2 \\ 2^{ctgx}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} ctgx=1 \\ ctgx=-1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z \\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z \end{array}\right.$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z$

5). $\left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} \geq \left(\dfrac{x^4+1}{2x^2}\right)^{2x^2-2}$

Решение:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} \geq \left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}\right)^{2-2x} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

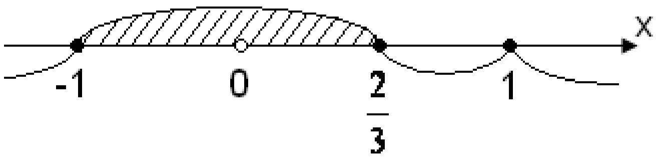
Воспользуемся условием равносильности:

$$a(x)^{f(x)} \geq a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0, \\ a(x) > 0 \end{cases}$$

Так как $\dfrac{2x^2}{x^4+1} > 0$, то данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{2x^2}{x^4+1}-1\right)(3x^2-x-2+2x) \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(2x^2-x^4-2)(3x^2+x-2)}{x^4+1} \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3(x^2-1)^2(x+1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right) \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -(x-1)^2(x+1)^3\left(x-\dfrac{2}{3}\right) \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$



$x \in [-1;0) \cup \left(0;\dfrac{2}{3}\right] \cup \{1\}$

Ответ: $[-1;0) \cup \left(0;\dfrac{2}{3}\right] \cup \{1\}$

5. Подведение итогов. Задание на дом

Выводы, оценки.
Решить уравнения и неравенства:

а) $3^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1-x}{x}} - 4$, **б)** $\dfrac{4^x+2x-4}{x-1} \leq 2$

в*) $\sqrt{27^{\sin x} - 2\cdot 3^{2\sin x+1} - 4\cdot 3^{\sin x} + 9} = 2\cdot 3^{\sin x} - 3$